



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
16 martie 2019

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XI-a

Problema 1.

- a) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} (\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x+2} - 3\sqrt{x+3})$.
- b) Determinați $a \in (0; +\infty)$ și $b \in \mathbb{R}^*$ încât $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(a + \frac{bx}{x^2 - 1} \right)^x = 2$.

Problema 2.

Considerând $M_2(\mathbb{R})$ mulțimea matricelor pătrate de ordin doi și cu elemente din mulțimea numerelor reale, se cere:

- a) Demonstrați că orice matrice $X \in M_2(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, verifică $X^2 - (a+d)X + (ad-bc)I_2 = O_2$.
- b) Demonstrați că pentru orice alegere de două matrice $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$ are loc $\det(X \cdot Y) = \det X \cdot \det Y$.
- c) Considerând $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ încât $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2018 & 1 \\ 2019 & 1 \end{pmatrix}$ arătați că $A \cdot B$ este inversabilă și $B \cdot A - (B \cdot A)^{-1} = 2019I_2$.

Problema 3.

Considerând funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{2x+3}{x-1}, & x \in (-\infty; 0) \\ x^2 - 3, & x \in [0; 2] \\ \sqrt{x-1}, & x \in (2; +\infty) \end{cases}$, se cere:

- a) Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției.
- b) Rezolvați inecuația $f(x) \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$.
- c) Arătați că ecuația $x \cdot f(x) = 3$ are o singură soluție $x \in (2; +\infty)$

Problema 4.

Considerând, în planul cartezian ortogonal, graficul G_f al funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{(x-2)(3x^2-1)}{4(x^2+1)}$, respectiv

punctele $A = A(-2; 0)$, $B = B(2; 3)$, $C = C(2; 0)$ și $M_x = M(x; f(x))$, se cere:

- a) Verificați că punctul C este pe graficul funcției f și arătați că acest grafic are asimptotă oblică spre $+\infty$ o dreaptă care trece prin C și este paralelă dreptei AB .
- b) Folosind eventual cele verificate anterior, determinați limitele $l_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} A(x)$, $l_2 = \lim_{x \rightarrow \infty} d(x)$ și $l_3 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{M_x A}{M_x B}$, unde $A(x)$ este aria triunghiului ABM_x , $d(x)$ este distanța de la punctul M_x la dreapta AB iar $M_x A$ și $M_x B$ sunt lungimile respectivelor segmente $[M_x A]$ și $[M_x B]$.